

Esercizi e complementi di teoria delle relazioni e dei grafi, parti I e II

andrea battinelli
dipartimento di scienze matematiche e informatiche “Roberto Magari”
Pian de' Mantellini 44 - 53100 Siena - Italia
+39-0577-233769 fax /30
battinelli@unisi.it

a.a.2006-07, I semestre, versione del 25 novembre 2006

Indice

1		5
1.1	Esercizi del 17.11.06	5
1.1.1	Richiamo sulle relazioni binarie	5
1.1.2	Dominanza paretiana in \mathbb{R}^2	7
1.1.3	Dominanza paretiana in \mathbb{R}^n	7
1.1.4	Immagini dirette e inverse secondo la dominanza paretiana stretta	8
1.1.5	Immagini dirette e inverse secondo la dominanza paretiana debole	8
1.1.6	Immagini dirette e inverse secondo la dominanza paretiana semi-stretta	9
1.2	Esercizi del 28.11.06	10
1.2.1	Primi esercizi dal testo consigliato	10
1.3	Esercizi del 5.12.06	12
1.3.1	Esercizi assegnati in aula	12
1.3.2	Altri esercizi assegnati dal libro di testo	14
1.4	Esercizi del 12.12.06	18
1.4.1	Esercizi assegnati dal libro di testo	18
1.5	Esercizi del 19.12.06	21
1.5.1	Esercizi assegnati dal libro di testo	21

Capitolo 1

1.1 Esercizi del 17.11.06

1.1.1 Richiamo sulle relazioni binarie

Siano X l'insieme dei cittadini italiani, Y l'insieme delle stringhe alfanumeriche di 15 caratteri, CF la relazione da X in Y : $xCFy$ se y è il codice fiscale di x . Discuti le proprietà di CF .

Ubiqua definizione. Si tratta qui di precisare quando ritieni che un neonato divenga cittadino italiano, e quando pensi che gli venga attribuito un codice fiscale; il giudizio sulla validità o meno della proprietà dipende da queste precisazioni. Se si diviene cittadini con la semplice nascita, precisamente quando si viene alla luce, oppure al momento in cui l'atto di nascita è controfirmato dall'ufficiale di anagrafe in presenza dei genitori, o di uno di essi se coniugati, o di altra persona legittimamente a ciò intitolata, è questione da discutere sul piano giuridico; in ogni caso, è abbastanza probabile che l'organo di governo (una volta era il ministero delle finanze, adesso accorpato ad altri ministeri) adibito all'attribuzione dei codici fiscali porti a compimento le nuove attribuzioni con un certo ritardo rispetto alla data di nascita o di registrazione dell'atto di nascita. In questo caso la relazione CF non è ovunque definita. Al contrario, se si è convinti che le nuove attribuzioni siano concluse "in tempo reale" in seguito a comunicazione telematica fra gli uffici di anagrafe e il centro operativo dell'agenzia finanziaria, allora si deve concludere che CF è ovunque definita.

Univocità. L'attribuzione di più di un codice fiscale ad una stessa persona fisica, o giuridica, è da ritenersi un errore che, ove si verificasse, deve essere corretto quanto prima. Fatto salvo l'eventuale ed eccezionale presentarsi di questo fenomeno, comunque temporaneo, CF è univoca.

Iniettività. L'attribuzione di uno stesso codice fiscale a due (o ancora peggio a più di due) persone fisiche, o giuridiche, è del pari da ritenersi un errore grave da correggere. In questo senso CF è (o si vuole che sia) iniettiva. L'implementazione pratica di questa proprietà ha sollevato qualche problema non proprio banale, dal momento che le regole standard di generazione dei codici, che tengono conto delle prime lettere (preferibilmente consonanti) di cognome e nome, della data di nascita, e del domicilio fiscale, possono ben condurre in prima battuta - sia pure eccezionalmente - a codici identici per individui distinti.

Suriettività. L'insieme Y di tutte le possibili stringhe alfanumeriche di 15 caratteri è assai più numeroso di quello dei cittadini italiani, anche tenendo conto delle restrizioni che impongono ai primi 6, ultimi 5, e 9° carattere di essere solo lettere, e agli altri 4 di essere solo numeri. CF non può pertanto ritenersi suriettiva. Del resto se così non fosse cosa si farebbe per i nuovi nati?

Si può così concludere che $CF : X \rightarrow Y$ è una funzione, purchè si abbia sufficiente fiducia nella celerità del processo di attribuzione di codici nuovi ai neonati. L'invertibilità è invece da escludersi per difetto di suriettività. Una versione modificata in modo da essere invertibile si ottiene per restrizione; se $Z \subseteq Y$ è l'insieme dei codici fiscali realmente attribuiti al momento presente a cittadini italiani viventi, allora la restrizione $\widehat{CF} : X \rightarrow Z$ è invertibile, e corrisponde al meccanismo che "rintraccia" il contribuente sulla base del codice.

Discuti la relazione di “fratellanza” nell’insieme delle persone di cittadinanza italiana: xFy se x è fratello di y .

Poiché non tutti gli italiani hanno un fratello, F non è ovunque definita, e nemmeno suriettiva. Poiché esistono famiglie con più figli, e quindi cittadini con più fratelli, F non è univoca, né iniettiva. Se un individuo possa, o debba, esser considerato fratello di sé medesimo, mi pare opinabile. Se ritieni questa eventualità una evidente forzatura, F non è riflessiva, anzi è addirittura irreflessiva. Se esigenze diverse di omogeneità ti suggeriscono invece di considerare l’identità un caso particolare di fratellanza, come si fa con il parallelismo fra rette, allora F è riflessiva.

Che F sia simmetrica può parere indubbio, ma considera l’affermazione, che supponiamo vera: “Carlo è fratello di Claudia”; segue forse da questa la verità della speculare affermazione: “Claudia è fratello di Carlo”? Si direbbe proprio di no, visto che semmai l’affermazione pertinente nel caso sarebbe: “Claudia è sorella di Carlo”. Quest’ultima affermazione non pare proprio identica alla precedente, che deve essere considerata - come appare - semplicemente scorretta, prima ancora che vera o falsa. In altre parole, può essere vero o falso che Claudia sia sorella di Carlo, e la circostanza si può accertare; ma semplicemente non ha senso in italiano chiedersi se una persona di sesso femminile sia fratello o meno di chicchessia. In questo senso, F non è una relazione simmetrica. Naturalmente ci si può impuntare, e sostenere che quando si parla di “fratellanza” si intende riferirsi ad una relazione che riguarda come soggetti tanto le donne che gli uomini, se sono figlie o figli degli stessi genitori*, anche se la marcatura sessuale della lingua italiana (come di moltissime altre) impone di designare con due qualificativi diversi - fratello e sorella appunto - coloro che in questa relazione con qualcun altro si trovano ad essere. In questo (diverso) senso, F è una relazione simmetrica, e i due qualificativi “fratello” e “sorella” devono essere considerati equivalenti, nonostante il non proprio trascurabile particolare che il primo abbia funzione universale, potendo valere al posto di entrambi[†], e il secondo no. Si potrebbe ancora replicare, osservando che anche in tal senso, quando si intende tradurre in parole l’espressione xFy riferita alla relazione di fratellanza F e agli individui x e y , si esprime F come “è sorella di” oppure come “è fratello di” secondo il sesso del soggetto che sta al primo posto nella coppia, cioè x , e del tutto indipendentemente dal sesso dell’individuo che sta al secondo posto, cioè y , con ciò significando comunque una qualche distinzione fra i due termini della coppia (x, y) , la cui posizione può essere invertita solo a prezzo di una alterazione linguistica. La questione potrebbe venire discussa molto a lungo, ma io la lascio a questo punto, non senza invitarti a domandarti come mai, e a quale titolo, si sia stabilita attraverso i secoli in questa ed altre parti del mondo - ma non ovunque - una tradizione secondo la quale il maschile designa l’universale, e il femminile il particolare...

Nell’accezione “figlia/o degli stessi due genitori di”, la relazione F è transitiva. Nell’accezione più ampia “nato da uno stesso genitore di” la relazione F non è transitiva. Se Andrea e Luigi sono tutti e due figli di Cleopatra e Antonio, mentre Giovanni è figlio di Francesca e Paolo, Andrea non è fratello di Giovanni, Giovanni non è fratello di Luigi, eppure Andrea è fratello di Luigi. la relazione F non è dunque negativamente transitiva. Infine, due diversi cittadini italiani scelti a caso possono benissimo non essere fratelli, precisamente né il primo del secondo né il secondo del primo; pertanto la relazione F non è neppure connessa.

Discuti la relazione di “dominanza paretiana debole nel piano”: $(x, y)P(u, v)$ se $x \leq u$ e $y \leq v$.

Procedo qui di seguito ad una discussione approfondita della relazione di dominanza paretiana, per fornirti un riferimento utile anche in futuro.

*o, in una accezione ancora più ampia, di almeno un genitore.

[†]come quando si dice “Claudia e Carlo sono fratelli” e non ci si sogna neppure di dire “Claudia e Carlo sono sorelle”.

1.1.2 Dominanza paretiana in \mathbb{R}^2

Siano (x, y) e (u, v) due coppie di numeri reali.

Si dice che la coppia (x, y) **domina strettamente** la coppia (u, v) , e si scrive:

$$(x, y) \succ_P (u, v)$$

se vale:

$$x > u \quad \text{e} \quad y > v$$

Si dice che la coppia (x, y) **domina debolmente** la coppia (u, v) , e si scrive:

$$(x, y) \gtrsim_P (u, v)$$

se vale:

$$x \geq u \quad \text{e} \quad y \geq v$$

Si dice che la coppia (x, y) **domina semi-strettamente** la coppia (u, v) , e si scrive:

$$(x, y) \succ_P (u, v)$$

se vale:

$$x \geq u \quad \text{e} \quad y \geq v \quad \text{e} \quad (x, y) \neq (u, v)$$

1.1.3 Dominanza paretiana in \mathbb{R}^n

Siano $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ e $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$ due elementi di \mathbb{R}^n . Si dice che \mathbf{x} **domina strettamente** \mathbf{u} , e si scrive:

$$\mathbf{x} \succ_P \mathbf{u}$$

se vale:

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} \quad x_i > u_i$$

Si dice che \mathbf{x} **domina debolmente** \mathbf{u} , e si scrive:

$$\mathbf{x} \gtrsim_P \mathbf{u}$$

se vale:

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} \quad x_i \geq u_i$$

Si dice che la coppia (x, y) **domina semi-strettamente** la coppia (u, v) , e si scrive:

$$(x, y) \succ_P (u, v)$$

se vale:

$$\mathbf{x} \gtrsim_P \mathbf{u} \quad \text{e} \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{u} \quad \text{ossia} \\ \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad x_i \geq u_i \quad \text{e} \quad \exists j \in \{1, \dots, n\} \quad x_j > u_j$$

1.1.4 Immagini dirette e inverse secondo la dominanza paretiana stretta

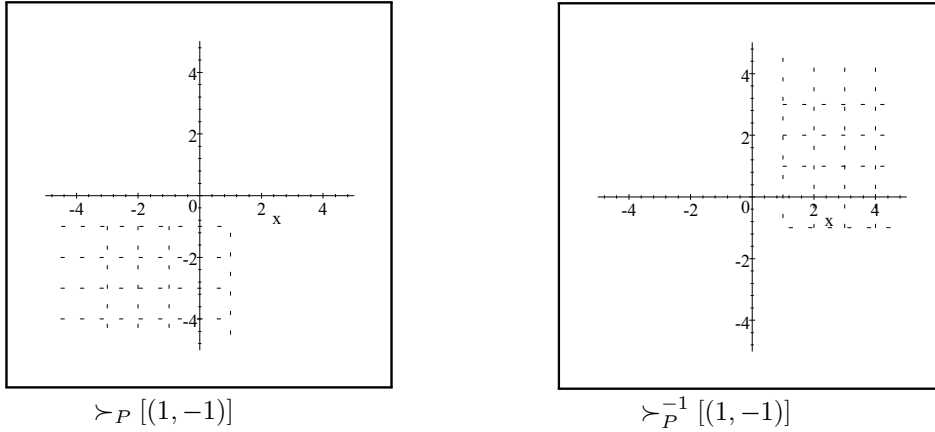
Sia (\bar{x}, \bar{y}) una coppia di numeri reali, rappresentata da un punto Q del piano cartesiano. L'immagine diretta di (\bar{x}, \bar{y}) secondo la relazione di dominanza paretiana stretta:

$$\succ_P [(\bar{x}, \bar{y})] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (\bar{x}, \bar{y}) \succ_P (x, y)\}$$

è l'insieme delle coppie (x, y) dominate strettamente da (\bar{x}, \bar{y}) , ed è rappresentato dall'insieme dei punti che hanno sia l'ascissa che l'ordinata minori di quelle di Q . Questo insieme non è altro che il quadrante di sud-ovest di un sistema di assi paralleli a quelli dati sul piano, con l'origine in Q , privo dei semiassi che lo delimitano. L'immagine inversa di (\bar{x}, \bar{y}) secondo la relazione di dominanza paretiana stretta:

$$\succ_P^{-1} [(\bar{x}, \bar{y})] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) \succ_P (\bar{x}, \bar{y})\}$$

è l'insieme delle coppie (x, y) che dominano strettamente (\bar{x}, \bar{y}) , ed è rappresentato dall'insieme dei punti che hanno sia l'ascissa che l'ordinata maggiori di quelle di Q . Questo insieme non è altro che il quadrante di nord-est del sistema di assi appena descritto, anch'esso privo dei semiassi che lo delimitano.



Gli altri due quadranti, insieme ai due assi, sono costituiti da punti che rappresentano coppie (x, y) per cui non è vero che (x, y) domina strettamente (\bar{x}, \bar{y}) , e non è nemmeno vero che (\bar{x}, \bar{y}) domina strettamente (x, y) ; questo illustra pienamente la mancanza di connessione della relazione \succ_P .

1.1.5 Immagini dirette e inverse secondo la dominanza paretiana debole

Sia (\bar{x}, \bar{y}) una coppia di numeri reali, rappresentata da un punto Q del piano cartesiano. L'immagine diretta di (\bar{x}, \bar{y}) secondo la relazione di dominanza paretiana debole:

$$\gtrsim_P [(\bar{x}, \bar{y})] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (\bar{x}, \bar{y}) \gtrsim_P (x, y)\}$$

è l'insieme delle coppie (x, y) che sono debolmente dominate da (\bar{x}, \bar{y}) , ed è rappresentato dall'insieme dei punti che hanno sia l'ascissa che l'ordinata minori o uguali a quelle di Q . Questo insieme non è altro che il quadrante di sud-ovest di un sistema di assi paralleli a quelli dati sul piano, con l'origine in Q , inclusivo dei semiassi che lo delimitano, così come del vertice Q .

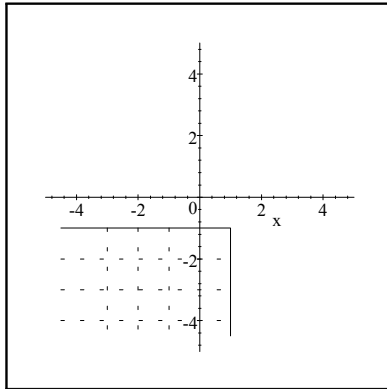
L'immagine inversa di (\bar{x}, \bar{y}) secondo la relazione di dominanza paretiana debole:

$$\gtrsim_P^{-1} [(\bar{x}, \bar{y})] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) \gtrsim_P (\bar{x}, \bar{y})\}$$

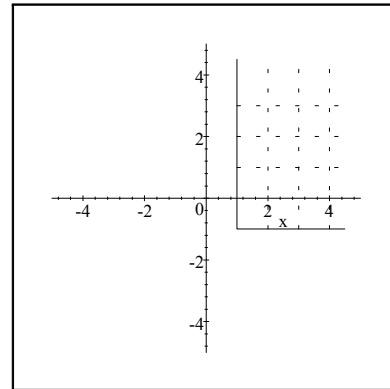
è l'insieme delle coppie (x, y) che dominano debolmente (\bar{x}, \bar{y}) , ed è rappresentato dall'insieme dei punti che hanno sia l'ascissa che l'ordinata maggiori o uguali a quelle di

Q . Questo insieme non è altro che il quadrante di nord-est del sistema di assi appena descritto, inclusivo dei semiassi che lo delimitano, così come del vertice Q .

Gli altri due quadranti, privi degli assi, sono costituiti da punti che rappresentano coppie (x, y) per cui non è vero che (x, y) domina debolmente (\bar{x}, \bar{y}) , e non è nemmeno vero che (\bar{x}, \bar{y}) domina debolmente (x, y) ; questo illustra pienamente la mancanza di connessione della relazione \succsim_P .



$\succsim_P [(1, -1)]$



$\succsim_P^{-1} [(1, -1)]$

1.1.6 Immagini dirette e inverse secondo la dominanza paretiana semi-stretta

Sia (\bar{x}, \bar{y}) una coppia di numeri reali, rappresentata da un punto Q del piano cartesiano. Lascio a te verificare che l'immagine diretta di (\bar{x}, \bar{y}) secondo la relazione di dominanza paretiana semi-stretta è rappresentata dal quadrante di sud-ovest di un sistema di assi paralleli a quelli dati sul piano, con l'origine in Q , inclusivo dei semiassi che lo delimitano, ma privo del vertice Q . In altre parole,

$$\succ_P [(\bar{x}, \bar{y})] = \succsim_P [(\bar{x}, \bar{y})] \sim \{Q\}$$

Analogamente, l'immagine inversa di (x, y) secondo la relazione di dominanza paretiana semi-stretta è rappresentata dal quadrante di nord-est del sistema di assi appena descritto, inclusivo dei semiassi che lo delimitano, ma privo del vertice Q .

$$\succ_P^{-1} [(x, y)] = \succsim_P^{-1} [(x, y)] \sim \{Q\}$$

Gli altri due quadranti, privi degli assi, ma inclusivi del vertice Q , sono costituiti da punti che rappresentano coppie (x, y) per cui non è vero che (x, y) domina semi-strettamente (\bar{x}, \bar{y}) , e non è nemmeno vero che (\bar{x}, \bar{y}) domina semi-strettamente (x, y) ; questo illustra la mancanza di connessione della relazione \succ_P .

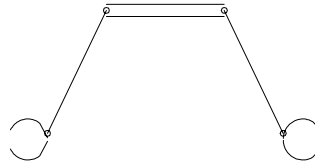
Tutte e tre le relazioni in esame sono transitive, per "effetto parallelo" su ciascuna componente della proprietà transitiva goduta dalle relazioni di $>$ e di \geq fra numeri reali. Nessuna delle tre è negativamente transitiva, né simmetrica. La dominanza paretiana debole è riflessiva, mentre le altre due sono irreflessive; essa è anche antisimmetrica, anche in questo caso per effetto parallelo su ciascuna componente della proprietà di antisimmetria goduta dalla relazione \geq fra numeri reali, mentre le altre sono addirittura asimmetriche.

1.2 Esercizi del 28.11.06

1.2.1 Primi esercizi dal testo consigliato

Pagina 68, numero 1.

Per il grafo \vec{G} sotto, determina la matrice di adiacenza A , calcola A^3 , e verifica che, per ogni i e j , a_{ij}^3 è il numero dei cammini da i a j di lunghezza 3, elencandoli tutti.



\vec{G} ha quattro nodi: $\{1, 2, 3, 4\}$ e sei archi: $\{a, b, c, d, e, f\}$, due dei quali sono cappi. La matrice di adiacenza è

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e pertanto

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dunque ci sono $e' A^3 e = 10$ cammini di lunghezza 3 in \vec{G} , il cui elenco completo è nella

tavola seguente:

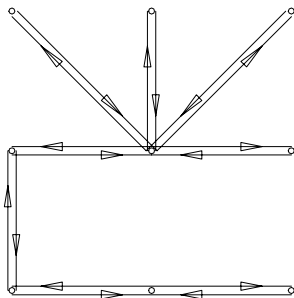
nodo iniziale	nodo terminale	descrizione per archi	descrizione per nodi
1	1	(a, a, a)	$(1, 1, 1, 1)$
2	1	(b, a, a)	$(2, 1, 1, 1)$
2	1	(c, d, b)	$(2, 3, 2, 1)$
2	3	(c, d, c)	$(2, 3, 2, 3)$
2	4	(c, e, f)	$(2, 3, 4, 4)$
3	1	(d, b, a)	$(3, 2, 1, 1)$
3	2	(d, c, d)	$(3, 2, 3, 2)$
3	4	(d, c, e)	$(3, 2, 3, 4)$
3	4	(e, f, f)	$(3, 4, 4, 4)$
4	4	(f, f, f)	$(4, 4, 4, 4)$

Pagina 68, numero 3.

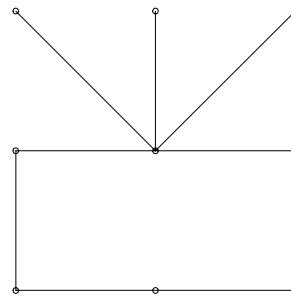
Mostra che il grafo la cui matrice di adiacenza è qui sotto non ha circuiti.

$$A \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Vi sono due possibili rappresentazioni del grafo, secondo che si interpreti la matrice data come la matrice di adiacenza di un grafo non orientato oppure come quella di un grafo orientato



grafo orientato $\vec{G} \equiv \{N, \mathcal{A}\}$



grafo non orientato: $G \equiv \{V, \mathcal{L}\}$

Nel primo caso la presenza di cicli di lunghezza 2 è conseguenza del fatto che tutti gli archi sono presenti a coppie di opposti, in virtù della simmetria di A ; numerosi altri cicli di lunghezza superiore (pari) sono anche facilmente immaginabili. Questa circostanza rivela che nello scrivere l'enunciato dell'esercizio Hastings doveva avere senz'altro in mente il solo caso non orientato. In questo secondo caso, ben 5 vertici, e cioè $\{1, 2, 3, 6, 7\}$, hanno grado 1 e non possono far parte di alcun circuito; nemmeno gli altri 4 (cioè $\{4, 5, 8, 9\}$) formano circuiti, come è del resto evidente dalla figura, perché 9 esaurisce il proprio grado (che è 5) con 4 vertici del primo gruppo, e uno solo del secondo, e lo stesso accade per 5, che divide il proprio grado 2 fra un vertice del primo gruppo e uno del secondo. In definitiva, non esiste alcun sottoinsieme W di V formato da almeno 3 vertici, i cui gradi nel grafo ristretto a W siano tutti superiori a 2.

Pagina 68, numero 4.

Determina una condizione necessaria e sufficiente sulle potenze della matrice di adiacenza di un grafo orientato di h nodi affinché esso non ammetta cicli.

Ho cambiato il testo dell'esercizio, sostituendo la parola "non orientato" con la parola "orientato", per renderlo più accessibile (in ogni caso ho tolto questo problema dalla valutazione del lavoro a casa). Poiché il numero dei cammini da nodo a nodo di lunghezza l è rappresentato nella matrice A^l potenza l -esima della matrice di adiacenza A (teorema 1.7), il termine $a_{ii}^{(l)}$ sulla diagonale di A^l conta il numero di cicli in \vec{G} di lunghezza l che iniziano e terminano nel nodo i . Inoltre, per il lemma dimostrato a lezione sull'esistenza di sottocammini elementari di cammini arbitrari aventi gli stessi estremi, posso restringermi a considerare soltanto cicli elementari, che in un grafo di ordine (h, k) non hanno lunghezza superiore a h . Infine, poiché tutti i coefficienti di una matrice di adiacenza e delle sue potenze sono non negativi, per escludere che lo stesso termine di ciascuna potenza sia strettamente positivo occorre e basta escludere che la somma di tutti questi termini sia strettamente positiva. La condizione pertanto, nel caso orientato voglio ancora sottolineare, può esprimersi così:

$$\text{diag} \left(\sum_{l=1}^h A^l \right) = (0, \dots, 0)$$

dove con $\text{diag}(M)$ di una matrice M indico il vettore che raccoglie tutti i termini sulla diagonale principale di M .

1.3 Esercizi del 5.12.06

1.3.1 Esercizi assegnati in aula

Completa l'argomentazione preliminare all'introduzione del concetto di albero svolta a lezione, mostrando che in un grafo non orientato aciclicità e uguaglianza del numero dei lati a quello dei vertici diminuito di uno implicano connessione.

Lemma 1 *Sia $G \equiv (V, \mathcal{L})$ un grafo non orientato di ordine (h, k) . Se G è aciclico e il numero dei vertici supera di uno il numero dei lati, cioè vale $k = h - 1$, allora G è anche connesso*

Dimostrazione. Procedo per induzione sul numero dei vertici di $G \equiv (V, \mathcal{L})$.

Passo iniziale. Se $h = 1$, G ha un solo vertice, e tutte e tre le proprietà sono verificate banalmente. Se $h = 2$, G è aciclico, per il semplice fatto che sono considerate circuiti solo le catene con estremi coincidenti che hanno lunghezza superiore a 2. Se G , con due vertici, è supposto avere un lato, allora risulta connesso, poiché questo lato non può che collegare tali vertici.

Passo induttivo. Sia ora $h \geq 3$, siano $h - 1$ i lati di G , e sia G aciclico; ammetto per ipotesi induttiva che ogni grafo non orientato aciclico, di $h - 1$ vertici e $h - 2$ lati sia anche connesso.

Sia $V_0 \subseteq V$ l'insieme dei vertici di G con grado nullo; rimuovendo da G tutti i vertici di V_0 non viene meno alcun lato; in altre parole, il grafo ristretto $G_{|V-V_0}$ ha gli stessi lati di V

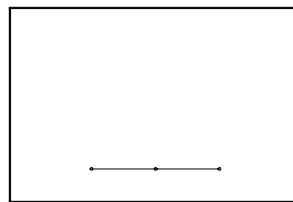
$$G_{|V-V_0} = (V - V_0, \mathcal{L})$$

Poiché G non ha circuiti, non li ha nemmeno $G_{|V-V_0}$; per il lemma sui gradi dei vertici di un grafo aciclico, esiste in $G_{|V-V_0}$ almeno un vertice v di grado inferiore a 2, il che in questo caso significa uguale a 1. Poiché G e $G_{|V-V_0}$ hanno gli stessi lati, v è anche un vertice di grado 1 in G .

Sia ℓ il lato cui v appartiene, e sia $G' \equiv (V - \{v\}, \mathcal{L} - \{\ell\})$ il grafo ottenuto da G sopprimendo tanto il vertice v che il lato ℓ . Poiché sono stati soppressi da G vertici e lati in ugual numero, la relazione fra numero di vertici e numero di lati che vale in G si mantiene valida anche in G' (precisamente, G' ha $h - 2$ lati e $h - 1$ vertici). Inoltre, certamente G' non è aciclico, dato che non sono stati aggiunti lati a quelli di G , anzi ne è stato tolto uno, e G è aciclico. Per l'ipotesi induttiva, G' è connesso. Ma allora anche G lo è, perché l'unico vertice in più di G rispetto a G' è collegato in G a un vertice di G' mediante il lato ℓ , ed è pertanto collegato in G a tutti gli altri vertici di G' , cioè a tutti gli altri vertici di G . ■

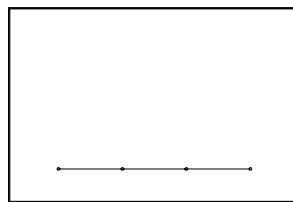
Presenta tutti i possibili diversi tipi di albero non orientato di ordine $(h, h - 1)$ con $h \in \{3, 4, 5, 6\}$.

$h = 3$

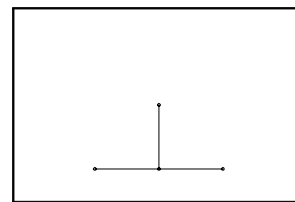


$$d' = (2, 1, 1)$$

$h = 4$

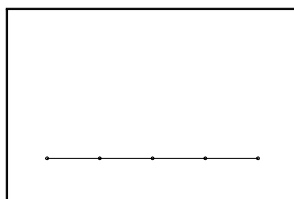


$$d' = (2, 2, 1, 1)$$

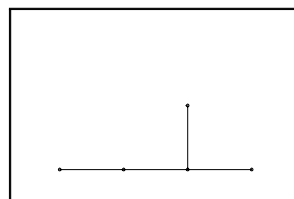


$$d' = (3, 1, 1, 1)$$

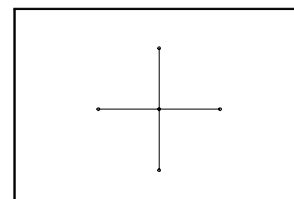
$h = 5$



$$d' = (2, 2, 2, 1, 1)$$

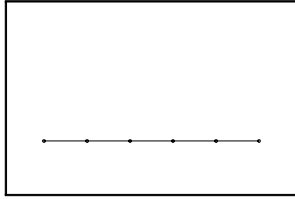


$$d' = (3, 2, 1, 1, 1)$$

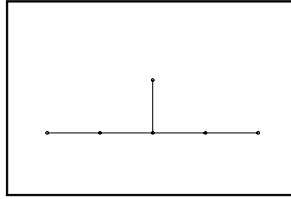


$$d' = (4, 1, 1, 1, 1)$$

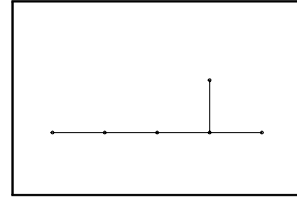
$h = 6$



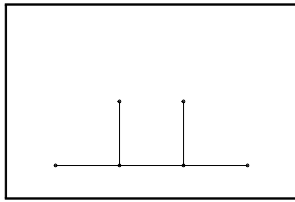
$$d' = (2, 2, 2, 2, 1, 1)$$



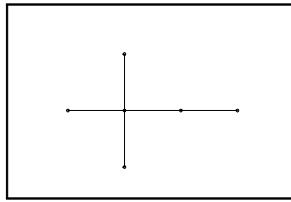
$$d' = (3, 2, 2, 1, 1, 1)$$



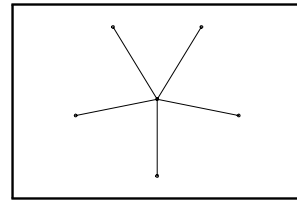
$$d' = (3, 2, 2, 1, 1, 1)$$



$$d' = (3, 3, 1, 1, 1, 1)$$



$$d' = (4, 2, 1, 1, 1, 1)$$



$$d' = (5, 1, 1, 1, 1, 1)$$

1.3.2 Altri esercizi assegnati dal libro di testo

Pagina 68, numero 5.

Mostra che non esiste un grafo non orientato di 4 vertici con vettore dei gradi $d \equiv (3, 2, 2, 2)$.

Primo argomento. Dalla formula (1.9) di pagina 7, relativa ad un grafo non orientato di ordine (h, k) ,

$$\sum_{v \in V} d_v = 2k$$

si vede che le componenti del vettore dei gradi hanno somma pari; al contrario, il vettore d dell'enunciato ha componenti la cui somma è dispari.

Secondo argomento. Poiché v_1 ha grado 3, e ci sono solo altri 3 vertici, i 3 lati cui v_1 appartiene lo collegano ciascuno con uno degli altri vertici. Siano $(\ell)_{i=2}^4$ questi lati; in altre parole,

$$\ell_2 \equiv \{v_1, v_2\} \quad \ell_3 \equiv \{v_1, v_3\} \quad \ell_4 \equiv \{v_1, v_4\}$$

Questo determina già grado 1 per v_2, v_3, v_4 . Poiché tutti hanno grado 2, ci deve essere un altro lato, che chiamo ℓ_1 , cui appartengono due di loro. Ma a questo punto tali due vertici hanno effettivamente grado 2, mentre l'altro resta con grado 1, e non c'è modo di ipotizzare l'esistenza di un ulteriore lato cui esso appartenga, senza che il grado di uno degli altri due aumenti ancora, superando il valore assegnato dal testo dell'esercizio.

Terzo argomento. Poiché tutti i vertici hanno grado superiore a 1, per il lemma su gradi e circuiti c'è un circuito nel grafo. Poiché i vertici sono 4, il circuito in questione può avere soltanto lunghezza 3 o lunghezza 4. Nel primo caso, i tre vertici hanno già grado 2 per la loro appartenenza al circuito. Occorre ipotizzare l'esistenza di altri lati per "riempire" il grado del quarto vertice. Sia che esso abbia grado 3, sia che abbia grado 2, questi ulteriori lati, in numero non inferiore a 2, non possono collegarlo che ad almeno 2 dei tre vertici in circuito, aumentando il loro grado oltre il valore assegnato dal testo. Nel secondo caso, tutti e 4 i vertici ricevono già grado 2 per la loro appartenenza al circuito. Uno di essi, che ha invece grado 3, dovrebbe appartenere ad un ulteriore lato, il cui secondo vertice è però introvabile, dato che quelli esistenti sono già a grado pieno.

Pagina 69, numero 7.

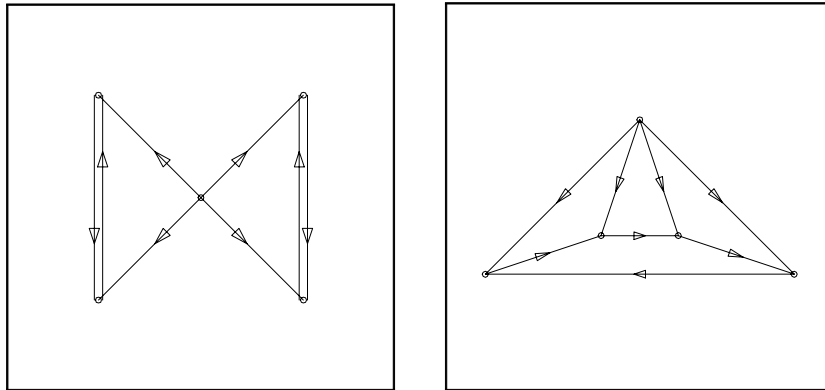
Due grafi orientati $\vec{G} \equiv (N, \mathcal{A})$ e $\vec{G}' \equiv (N', \mathcal{A}')$ si dicono isomorfi se esiste una corrispondenza biunivoca

$$f : N \rightarrow N'$$

tale che, $\forall m \in N, \forall n \in N,$

$$(m, n) \in \mathcal{A} \quad \text{se e solo se} \quad (f(m), f(n)) \in \mathcal{A}'$$

Mostra che i due grafi orientati qui sotto non possono essere isomorfi.



Primo argomento. Dalla definizione di isomorfismo segue che per ogni nodo n di \vec{G} , il grado interno di n coincide con quello di $f(n)$, e la stessa cosa accade per i gradi esterni. Infatti, se m è un qualunque nodo predecessore immediato di n , e quindi l'arco (m, n) appartiene ad \mathcal{A} , allora il nodo $f(m)$ è predecessore immediato di $f(n)$, perché l'arco $(f(m), f(n))$ appartiene ad \mathcal{A}' ; così, anche il numero dei predecessori immediati di n , cioè il grado interno d_n^- , coincide con il numero dei predecessori immediati di $f(n)$, cioè con $d_{f(n)}^-$; e il ragionamento è identico per i successori immediati di n e $f(n)$ e i gradi esterni d_n^+ e $d_{f(n)}^+$. Questo implica in particolare che l'immagine $f(m_3)$ di m_3 , nodo che ha gradi 0 e 4 rispettivamente, non può che essere n_1 , unico nodo di \vec{G}' ad avere anch'esso gradi 0 e 4. Tutti gli altri nodi di \vec{G} e \vec{G}' hanno gradi 2 e 1, e per quanto concerne la restrizione sui gradi qualunque nodo di \vec{G}' diverso da n_1 potrebbe essere l'immagine di un qualunque nodo di \vec{G} diverso da m_3 . Tuttavia, nessun nodo di \vec{G}' può essere realmente l'immagine $f(m_3)$ di m_3 , perché m_1 ha come successore immediato il nodo m_4 , che a sua volta gli è predecessore immediato, mentre ogni nodo di \vec{G}' ha come successore immediato un nodo che è predecessore immediato di un altro nodo.

Secondo argomento. Costruiamo le due matrici di adiacenza e i quattro vettori di grado

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (d^-)' = e'A = (2, 2, 0, 2, 2) \quad d^+ = Ae = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (g^-)' = e'B = (0, 2, 2, 2, 2) \quad g^+ = Be = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dovrebbe essere chiaro che un eventuale isomorfismo non può che mettere in corrispondenza m_3 con n_1 , data la loro posizione unica nel proprio grafo, come testimoniato dai

gradi interno ed esterno. Occorre pertanto permutare preliminarmente le righe e colonne prima e terza della matrice B , e conseguentemente la prima e terza componente dei vettori di grado g^- e g^+ , per discutere in modo sensato la questione dell'esistenza di un isomorfismo fra i due grafi. Questa permutazione corrisponde a riordinare i nodi di \vec{G}' nel modo seguente: $(n_2, n_3, n_1, n_4, n_5)$. Si ha così

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\tilde{g}^-)' = e' \tilde{B} = (2, 2, 0, 2, 2) \quad \tilde{g}^+ = \tilde{B}e = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Nonostante questa permutazione abbia reso identiche le righe dispari e le colonne pari delle due matrici, ancora c'è difformità. Si potrebbe pensare di scambiare ancora di posto i nodi n_2 e n_4 , ossia permutare ulteriormente righe e colonne seconda e quarta di \tilde{B} , e similmente per \tilde{g}^- e \tilde{g}^+ . Ecco il risultato:

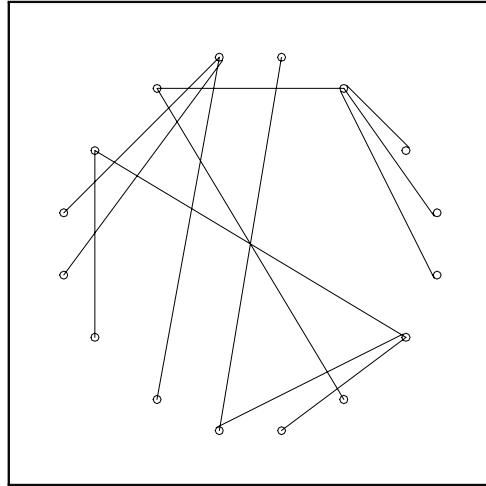
$$\hat{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\hat{g}^-)' = e' \hat{B} = (2, 2, 0, 2, 2) \quad \hat{g}^+ = \hat{B}e = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

che illustra in modo ormai convincente l'impossibilità di stabilire un isomorfismo tra i due grafi.

Terzo argomento. In \vec{G}' esiste il cammino $(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5)$ che visita tutti i nodi, mentre in \vec{G} un cammino corrispondente con tale proprietà non esiste.

Pagina 70, numero 14.

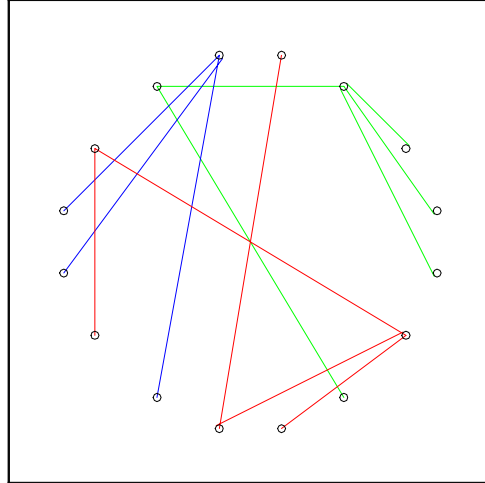
Trova le componenti connesse del grafo disegnato nella figura seguente.



Le componenti connesse sono

$$\begin{aligned} C_1 &\equiv (\{1, 2, 3, 4, 6, 14\}, \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 14\}, \{6, 14\}\}) \\ C_2 &\equiv (\{5, 7, 8, 10, 13, 16\}, \{\{5, 7\}, \{5, 8\}, \{5, 13\}, \{8, 16\}, \{10, 13\}\}) \\ C_3 &\equiv (\{9, 11, 12, 15\}, \{\{9, 15\}, \{11, 15\}, \{12, 15\}\}) \end{aligned}$$

Figurativamente,



Pagina 70, numero 17.

Trova le componenti connesse del grafo non orientato avente la seguente matrice di adiacenza;

$$A \equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Le componenti connesse sono

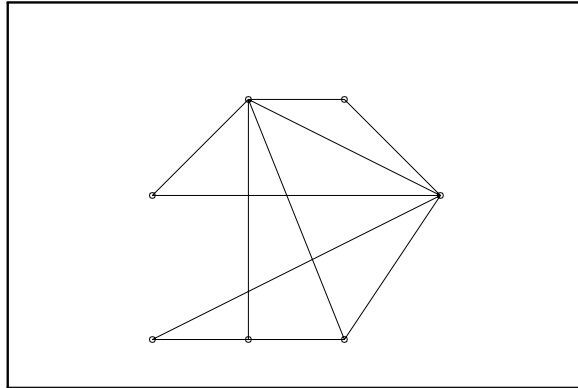
$$\begin{aligned} C_1 &\equiv (\{1, 2, 10\}, \{\{1, 2\}, \{1, 10\}\}) \\ C_2 &\equiv (\{3, 4, 6, 7\}, \{\{3, 4\}, \{3, 6\}, \{6, 7\}\}) \\ C_3 &\equiv (\{5, 8, 9\}, \{\{5, 8\}, \{8, 9\}\}) \end{aligned}$$

1.4 Esercizi del 12.12.06

1.4.1 Esercizi assegnati dal libro di testo

Pagina 71, numero 23

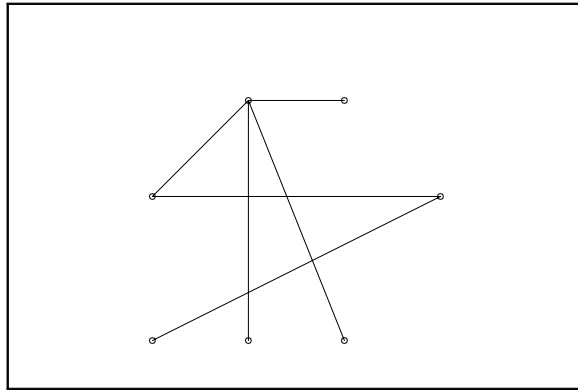
Determina un albero generatore del grafo disegnato sotto facendo uso dell'algoritmo 2.9.



Inizio etichettando ciascun vertice con il proprio indice; queste etichette iniziali compaiono nella riga di testa (la riga “zero”) della tabella. Ogni altra riga corrisponde ad un passo dell'algoritmo, nel quale si esamina un lato e, qualora lo si accetti, si procede a modificare le etichette in modo che vertici nella stessa componente connessa del sottografo corrente abbiano la stessa etichetta. Il nome del lato esaminato occupa il primo campo di ogni riga; nel secondo campo appaiono le parole “sì” oppure “no”, secondo che il lato sia accettato o meno (accanto al “sì” compare anche il numero dei lati accettati fino al momento, al fine di valutare se si è verificata la condizione di arresto dell'esecuzione). Nel primo caso i campi residui della riga sono parzialmente modificati rispetto a quelli della riga precedente, per effetto della riassegnazione delle etichette. Nel secondo caso essi coinciderebbero con quelli della riga precedente, e pertanto non scrivo nulla. Ho svolto l'esame dei lati dopo averli ordinati in modo lessicografico (naturalmente un qualunque altro ordine sarebbe stato legittimo, dando però possibilmente luogo ad un albero generatore diverso).

		1	2	3	4	5	6	7
$\{v_1, v_2\}$	sì (1)	1	1	3	4	5	6	7
$\{v_1, v_4\}$	sì (2)	1	1	3	1	5	6	7
$\{v_2, v_3\}$	sì (3)	1	1	1	1	5	6	7
$\{v_2, v_4\}$	no							
$\{v_2, v_5\}$	sì (4)	1	1	1	1	1	6	7
$\{v_2, v_6\}$	sì (5)	1	1	1	1	1	1	7
$\{v_3, v_4\}$	no							
$\{v_4, v_5\}$	no							
$\{v_4, v_7\}$	sì (6)	1	1	1	1	1	1	1
$\{v_5, v_6\}$	fine							
$\{v_6, v_7\}$								

Ed ecco l'albero generatore risultante:

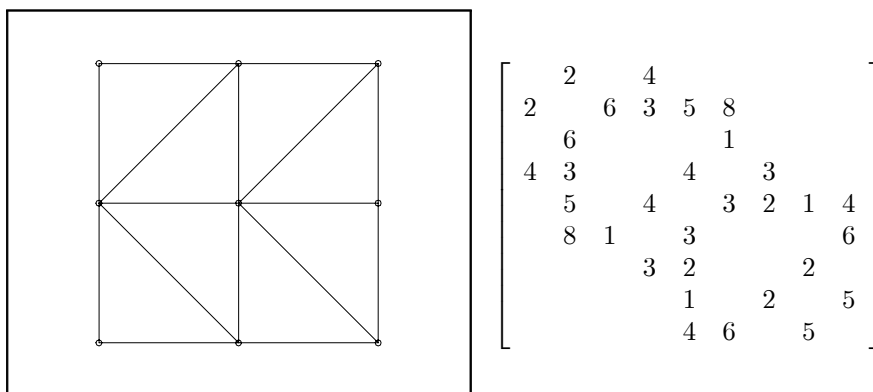


cioè

$$T \equiv (V, \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_4\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_5\}, \{v_2, v_6\}, \{v_4, v_7\}\})$$

Pagina 73, numero 33

Dei cavi devono essere connessi a svariati componenti di un sistema di riproduzione e amplificazione del suono. I vertici del grafo qui sotto rappresentano i vari componenti del sistema, e i lati le connessioni possibili. Nella matrice è indicata la lunghezza del cavo richiesto dalla possibile connessione fra le varie coppie di vertici. Determina il sistema di connessioni che necessita della quantità minima di cavo.

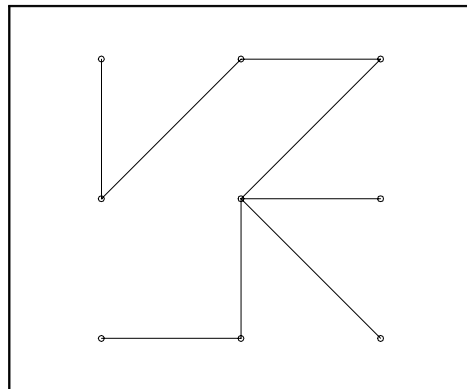


Per prima cosa dispongo, nella prima colonna della matrice di lavoro, i lati di G in ordine di costo non decrescente; poiché ci sono lati di ugual costo, vi è un certo grado di arbitrarietà nel modo in cui lo faccio, che consiste nell'operare, in subordine, lessicograficamente. Nella colonna attigua riporto i costi. Successivamente eseguo l'algoritmo già illustrato in altri esercizi, come in particolare nell'esercizio (1.4.1), dedicando ognuna delle ulteriori colonne ad un vertice, e ogni riga ad uno stadio dell'algoritmo, che consiste nell'esame del lato che

apre la riga, e ad una eventuale riattribuzione delle etichette ai vertici.

		vertice	1	2	3	4	5	6	7	8	9
		etichetta	1	2	3	4	5	6	7	8	9
lato	costo										
{3, 6}	1	sì (1)	1	2	3	4	5	3	7	8	9
{5, 8}	1	sì (2)	1	2	3	4	5	3	7	5	9
{1, 2}	2	sì (3)	1	1	3	4	5	3	7	5	9
{5, 7}	2	sì (4)	1	1	3	4	5	3	5	5	9
{7, 8}	2	no									
{2, 4}	3	sì (5)	1	1	3	1	5	3	5	5	9
{4, 7}	3	sì (6)	1	1	3	1	1	3	1	1	9
{5, 6}	3	sì (7)	1	1	1	1	1	1	1	1	9
{1, 4}	4	no									
{4, 5}	4	no									
{5, 9}	4	sì (8)	1	1	1	1	1	1	1	1	1
{2, 5}	5	fine									
{8, 9}	5										
{2, 3}	6										
{6, 9}	6										
{2, 6}	8										

L'albero generatore risultante è dunque il seguente



cioè

$$T \equiv (V, \{\{3, 6\}, \{5, 8\}, \{1, 2\}, \{5, 7\}, \{2, 4\}, \{4, 7\}, \{5, 6\}, \{5, 9\}\})$$

$$C = 1 + 1 + 2 + 2 + 3 + 3 + 3 + 4 = 19$$

Pagina 74, numero 36

Supponi che le distanze fra otto città siano quelle indicate nella seguente tavola, e che il costo di un volo aereo che collega due città sia proporzionale alla relativa distanza. Trova un sistema completo di rotte costituente un servizio di linea che serva tutte e otto le città,

e che sia ottimo sotto il profilo dei costi.

città	1	2	3	4	5	6	7	8
1	—	24	20	22	15	60	20	24
2		—	32	45	12	21	14	50
3			—	14	20	35	80	46
4				—	18	20	26	40
5					—	31	19	30
6						—	20	40
7							—	35
8								—

Procedo come nell'esercizio (1.4.1), ma ometto di elencare nella matrice di lavoro i collegamenti che non vengono esaminati dall'algoritmo, perché il processo si arresta prima di effettuarne l'esame.

		città								
		1	2	3	4	5	6	7	8	
collegamento		etichetta								
distanza		1	2	3	4	5	6	7	8	
{2, 5}	12	sì (1)	1	2	3	4	2	6	7	8
{2, 7}	14	sì (2)	1	2	3	4	2	6	2	8
{3, 4}	14	sì (3)	1	2	3	3	2	6	2	8
{1, 5}	15	sì (4)	1	1	3	3	1	6	1	8
{4, 5}	18	sì (5)	1	1	1	1	1	6	1	8
{5, 7}	19	no								
{1, 3}	20	no								
{1, 7}	20	no								
{3, 5}	20	no								
{4, 6}	20	sì (6)	1	1	1	1	1	1	1	8
{6, 7}	20	no								
{2, 6}	21	no								
{1, 4}	22	no								
{1, 2}	24	no								
{1, 8}	24	sì (7)	1	1	1	1	1	1	1	1
		fine								

Dunque il sistema completo di rotte è rappresentato dal seguente albero generatore:

$$T \equiv (V, \{\{2, 5\}, \{2, 7\}, \{3, 4\}, \{1, 5\}, \{4, 5\}, \{4, 6\}, \{1, 8\}\})$$

$$C = 12 + 14 + 14 + 15 + 18 + 20 + 24 = 117$$

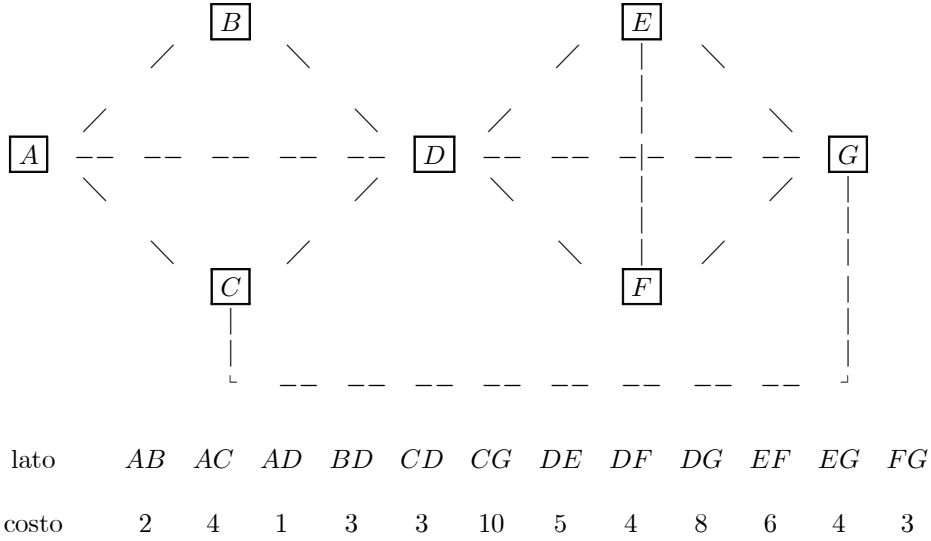
1.5 Esercizi del 19.12.06

1.5.1 Esercizi assegnati dal libro di testo

Pagina 74, numero 40

Un luna park vuol costruire e gestire un trenino per trasportare i visitatori da un'attrazione all'altra all'interno del parco. Ogni attrazione è rappresentata da un nodo nel grafo qui sotto, e i pesi dei lati, corrispondenti a distanze, sono indicati nella tabella che segue il grafo. Progetta un percorso sistematico per il trenino che lo faccia servire ciascuna

attrazione del parco e utilizzi la minima quantità di binari.



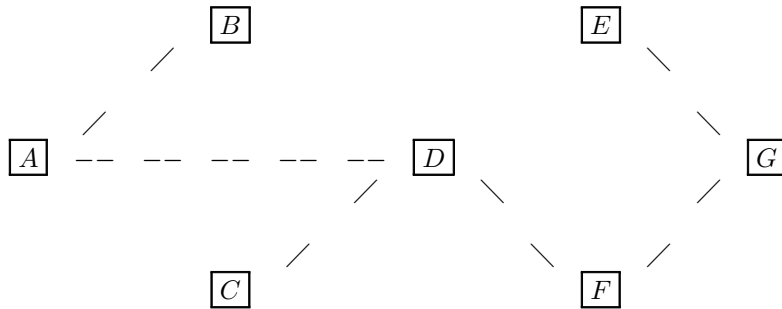
Procedo come nell'esercizio (1.4.1), dopo aver disposto i lati in ordine di costo non decrescente. La matrice che registra i vari stadi di esecuzione dell'algoritmo di Kruskal è la seguente:

		attrazione	A	B	C	D	E	F	G
		etichetta	A	B	C	D	E	F	G
lato	distanza								
AD	1	sì (1)	A	B	C	A	E	F	G
AB	2	sì (2)	A	A	C	A	E	F	G
BD	3	no							
CD	3	sì (3)	A	A	A	A	E	F	G
FG	3	sì (4)	A	A	A	A	E	F	F
AC	4	no							
DF	4	sì (5)	A	A	A	A	E	A	A
EG	4	sì (6)	A	A	A	A	A	A	A
		fine							

Pertanto il percorso del trenino che minimizza la quantità di binari da installare è rappresentato dall'albero generatore:

$$T \equiv (V, \{AD, AB, CD, FG, DF, EG\})$$

illustrato nella figura:

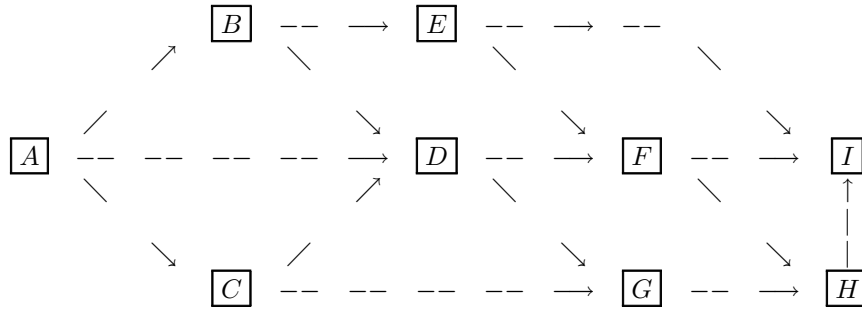


e il costo di acquisizione del totale dei binari necessari alla realizzazione del percorso è

$$1 + 2 + 3 + 3 + 4 + 4 = 17$$

Pagina 78, numero 45

Un bacino di raccolta, rappresentato dal nodo A nel grafo che segue, deve venir posto in condizione di rifornire diverse stazioni di pompaggio e distribuzione, rappresentate dai nodi da B a I . I pesi degli archi che insistono su particolari coppie di nodi rappresentano i costi di costruzione di possibili sistemi di serbatoi, in parte a caduta, fra le rispettive stazioni di pompaggio; essi sono indicati, come d'uso, nella tabella successiva al grafo. Quali sistemi di serbatoi occorre effettivamente costruire per rifornire tutte le stazioni con il minimo costo?



AB	AC	AD	BD	BE	CD	CG	DF	DG	EF	EI	FH	FI	GH	HI
3	6	4	3	4	2	2	1	2	1	5	4	3	2	3

Risolvi il problema in due modi: (a) con l'algoritmo di "miglioramento di gestione"; (b) con l'algoritmo di Dijkstra illustrato nell'esercizio 44.

(a) Il primo passo da fare per giungere alla soluzione consiste nella determinazione di un albero generatore $\vec{T} \equiv (N, \mathcal{B})$ del grafo $\vec{G} \equiv (N, \mathcal{A})$, scelto arbitrariamente, con cui inizializzare l'algoritmo di miglioramento di gestione. E' chiaro già dall'enunciato, e si vede comunque subito ad occhio, che \vec{G} ha esattamente una radice nel nodo A . E' allora sufficiente eseguire l'algoritmo di determinazione di tutti i successori di tale nodo, nella versione presentata a lezione, che contestualmente determina anche un albero generatore del grafo $\vec{G}|_{\mathcal{A}(A)}$ ottenuto da \vec{G} per restrizione all'insieme dei successori di A , che nel caso presente coincide con \vec{G} per essere A la radice di \vec{G} . Procedo costruendo, per ogni esecuzione del ciclo ripetibile, una matrice di quattro righe[‡], la prima e la terza per i nomi dei nodi e degli archi, rispettivamente, la seconda e la quarta per le corrispondenti marcature ottenute al termine del ciclo. Per gli archi c'è una sola marcatura possibile, che indico con il simbolo di appartenenza "e", e che testimonia l'avvenuto inserimento dell'arco nell'insieme \mathcal{M} degli archi di \vec{T} . Per i nodi invece ci sono due tipi di marcatura, α e ω : la prima, provvisoria, testimonia l'avvenuto inserimento del nodo nell'insieme dei nodi di \vec{T} (che alla fine deve nel caso presente coincidere con N), in quanto testè identificato come successore diretto del nodo iniziale o di un suo successore già a sua volta identificato; la seconda, definitiva, testimonia il completamento dell'esame dei successori del nodo.

[‡]Con un numero minore di nodi e/o archi avrei potuto allineare in una singola riga tanto i nomi dei nodi che quelli degli archi, operando con una sola matrice per l'intera esecuzione, e rappresentando i risultati provvisori dell'esecuzione di ogni ciclo dell'algoritmo nelle varie righe della matrice. Ma con 9 nodi e 15 archi i limiti di spazio mi hanno imposto di allineare nomi di nodi e di archi in righe diverse, e così l'esecuzione di ogni singolo ciclo risulta descritta da una matrice di quattro righe, due per i nomi e due per le marcature.

il nodo[§] G :

	A	B	C	D	E	F	G	H	I					
	ω	ω	ω	ω	ω	α	ω	α	α					
AB	AC	AD	BD	BE	CD	CG	DF	DG	EF	EI	FH	FI	GH	HI
ϵ	ϵ	ϵ		ϵ		ϵ	ϵ			ϵ			ϵ	

e i nodi[¶] F, I, H :

	A	B	C	D	E	F	G	H	I					
	ω	ω	ω	ω	ω	ω	ω	α	α					
AB	AC	AD	BD	BE	CD	CG	DF	DG	EF	EI	FH	FI	GH	HI
ϵ	ϵ	ϵ		ϵ		ϵ	ϵ			ϵ			ϵ	

	A	B	C	D	E	F	G	H	I					
	ω	ω	ω	ω	ω	ω	ω	α	ω					
AB	AC	AD	BD	BE	CD	CG	DF	DG	EF	EI	FH	FI	GH	HI
ϵ	ϵ	ϵ		ϵ		ϵ	ϵ			ϵ			ϵ	

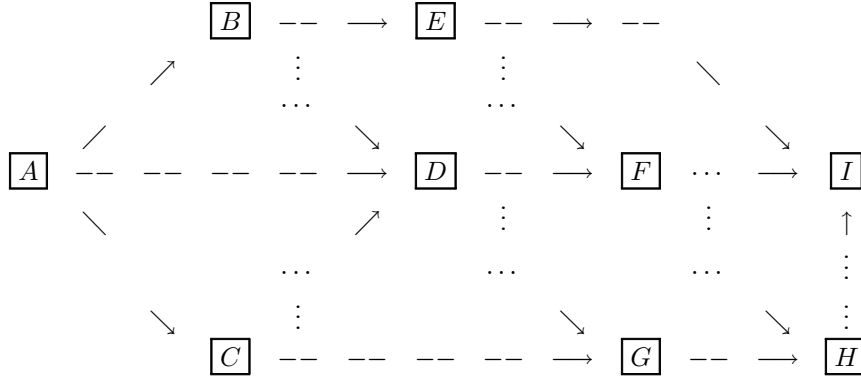
	A	B	C	D	E	F	G	H	I					
	ω	ω	ω	ω	ω	ω	ω	ω	ω					
AB	AC	AD	BD	BE	CD	CG	DF	DG	EF	EI	FH	FI	GH	HI
ϵ	ϵ	ϵ		ϵ		ϵ	ϵ			ϵ			ϵ	

L'albero generatore iniziale è dunque il seguente, così come appare per effetto del mantenimento del tratteggio lungo sugli archi di \mathcal{M} , mentre i residui archi di \mathcal{A} sono in buona

[§]A proposito dell'arbitrarietà caratterizzante questa o quella implementazione dell'algoritmo, con i diversi possibili risultati cui esse possono condurre, è forse utile sottolinearne adesso un aspetto. Presentando ad ogni passo i risultati complessivi di ogni singola esecuzione del ciclo, potrebbe esserti sfuggita quella connessa con la mia scelta di ordinare gli archi come parole di due lettere in ordine alfabetico, cosa che può corrispondere in fase di esecuzione ad esaminare gli archi uscenti da un dato nodo in tale ordine, marcando di conseguenza essi stessi con ϵ e i nodi verso cui incidono con α , quando è il caso, nello stesso ordine. Ma a questo punto non puoi mancare di notare che, nel passaggio da una esecuzione del ciclo alla successiva, è possibile procedere col nodo che tra quelli ancora marcati con α è il primo sempre in ordine alfabetico (qui F), oppure che è il primo ad aver ricevuto tale marcatura nelle esecuzioni precedenti (qui G), o in qualche altro modo. Io ho preferito seguire la "storia" dell'esecuzione nel passaggio tra cicli, mentre ho seguito l'ordine alfabetico all'interno di ogni ciclo.

[¶]Questa e le due successive esecuzioni del ciclo conducono soltanto al cambio di marcatura dei nodi, che ormai sono già tutti marcati; del resto anche il numero di archi inseriti in \mathcal{M} ha raggiunto il valore critico pari al numero dei nodi diminuito di uno.

parte punteggiati:

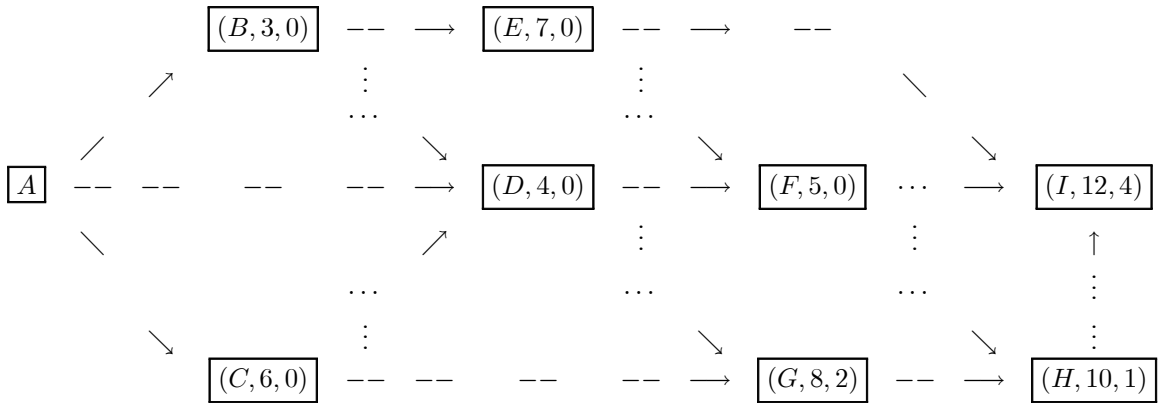


In ogni stadio dell'algoritmo di miglioramento di gestione, che denoto con l'indice corrente i , e che corrisponde ad un ben identificato albero generatore $\bar{T}_i \equiv (N, \mathcal{M}_i)$ correntemente in uso, attribuisco ad ogni nodo $n \in N - \{\text{radice}\}$ una coppia di numeri, che affianco al nome del nodo. Il primo numero è il costo di raggiungimento $C_i(n)$ del nodo dalla radice, calcolato lungo l'unico cammino esistente in \bar{T}_i (cioè utilizzando i soli archi di \mathcal{M}_i). Il secondo è il **residuo al nodo** $r_i(n)$, calcolato come il massimo fra i **residui degli archi** incidenti verso il nodo stesso, dove il residuo $r_i(m, n)$ di un arco (m, n) è definito dall'espressione

$$C_i(n) - [C_i(m) + w(m, n)]$$

corrispondente al risparmio ottenibile raggiungendo n via l'arco (m, n) , preceduto dal cammino che in \bar{T}_i raggiunge m dalla radice.

Così (stadio 0) l'albero iniziale \bar{T}_0 , in cui ciascun nodo è stato corredato da costo e residuo, si presenta nel modo seguente:



Ad esempio, per determinare il residuo del nodo I ho dovuto calcolare tre residui d'arco, precisamente quelli di EI , FI , e HI . Il primo naturalmente risulta nullo, perché I viene effettivamente raggiunto via EI nell'albero corrente \bar{T}_0 :

$$12 - (8 + 4) = 0$$

Al contrario, il secondo è positivo:

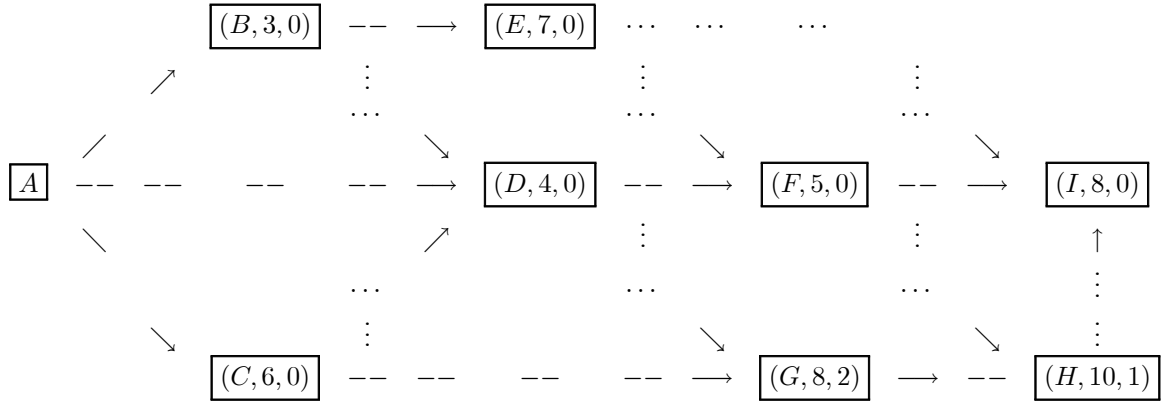
$$12 - (5 + 3) = 4$$

segnalando un possibile vantaggio - nel raggiungimento di I - risultante dal solo cambiamento nell'albero corrente dell'arco EI con l'arco FI . Infine, il terzo è negativo:

$$12 - (10 + 3) = -1$$

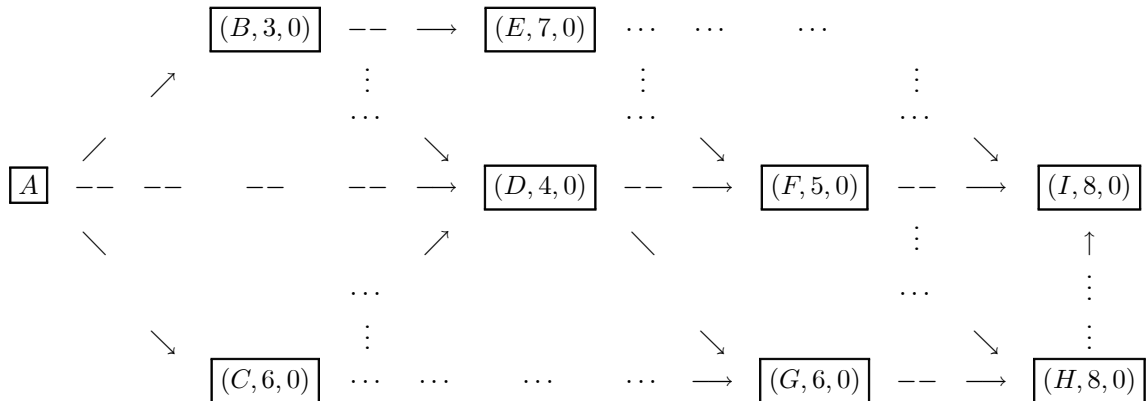
cosa che segnala invece la non convenienza dell'ipotetico scambio di EI con HI . Il residuo in I è dunque pari a 4. Inoltre, esso risulta anche il residuo massimo esistente usando \vec{T}_0 , e pertanto il successivo albero generatore \vec{T}_1 si ottiene da \vec{T}_0 con la sostituzione di EI con FI .

Il primo stadio aggiorna costi e residui in relazione a \vec{T}_1 ; nella fattispecie, essendo stato sostituito l'arco incidente verso una foglia (l'unica in \vec{G} , ossia I), nulla cambia eccetto costo e residuo della foglia medesima:



Adesso il massimo residuo è in G , e la sostituzione è di CG con DG .

Ecco l'albero generatore \vec{T}_2 del secondo stadio:



Il mutamento del cammino di raggiungimento di G abbatte non solo il costo di G stesso, ma anche quello del suo successore diretto H , con la conseguenza che adesso tutti i residui sono nulli, ossia l'albero generatore \vec{T}_2 è di costo minimo. I sistemi di serbatoi da costruire corrispondono dunque ai seguenti collegamenti fra stazioni (\mathcal{M}_2):

$$\{AB, AC, AD, BE, DF, DG, FI, GH\}$$

e i costi di costruzione complessivi ammontano a

$$3 + 6 + 4 + 4 + 1 + 2 + 3 + 2 = 25$$

(b) Rappresento anche l'esecuzione dell'algoritmo di Dijkstra con una tabella, la cui prima riga - cui posso dare l'indice 0 - contiene i nomi dei nodi, e le altre 9, tante quanti sono i nodi, corrispondono ciascuna ad uno stadio dell'algoritmo. Viene costruito - gradualmente - un solo albero generatore, che viene completato alla fine dell'ultimo stadio, e risulta di costo minimo, come desiderato. In ogni stadio si lavora su uno dei nodi, che al termine dello stadio non verrà più preso in considerazione nei successivi

stadi, esaminando ciascuno dei suoi successori immediati nel grafo, e modificandone se del caso il costo provvisorio di raggiungimento; in caso affermativo, la modifica viene “ufficializzata” dichiarando successore anche nell’albero in costruzione (e non solo nel grafo) il nodo di cui si è modificato il costo. Dunque nel corso dell’esecuzione ogni nodo diverso dalla radice è caratterizzato da due elementi: il costo provvisorio di raggiungimento e il proprio predecessore momentaneo. Ogni elemento della matrice nella colonna intestata a un nodo descrive questi due elementi per quel nodo, nello stadio corrispondente alla riga ove si trova. A partire dallo stadio i in cui un nodo è quello di lavoro, cosa che esprimo chiamandolo n_i , mentre chiamo $N_i \equiv \{n_1, \dots, n_i\}$ l’insieme dei nodi che sono o sono stati di lavoro fino a quel momento, i due elementi come detto non cambiano, e anzi evito addirittura di copiarli per rendere più evidente l’insieme $N - N_i$ dei nodi residui, ancora disponibili come nodi di lavoro in seguito. Nel passaggio da uno stadio al successivo, si deve abbandonare il nodo su cui si è lavorato e sceglierne uno sul quale si lavorerà, nell’insieme $N - N_i$. La scelta avviene identificando un nodo residuo di costo minimo. In altre parole, al termine dello stadio i -esimo, il nodo di lavoro n_{i+1} dello stadio successivo è definito così:

$$n_{i+1} \in \arg \min_{n \in N - N_i} C_i(n)$$

Naturalmente il nodo di lavoro n_1 del primo stadio è la radice del grafo. Inoltre, in tale stadio ogni altro nodo viene convenzionalmente inizializzato come suo successore, con costo provvisorio pari a quello dell’arco attraverso cui lo si raggiunge dalla radice, se il nodo ne è effettivamente un successore immediato nel grafo, e pari a infinito altrimenti. Infine, in ogni stadio la modifica nei costi di raggiungimento dei successori immediati del nodo di lavoro è fatta nell’identico spirito che conduce a calcolare il residuo di un arco nell’algoritmo di miglioramento di gestione: il costo provvisorio $C_i(n)$ di raggiungimento del nodo n , non appartenente a N_i e successore del nodo di lavoro n_{i+1} , viene modificato se è possibile spendere meno raggiungendo n_{i+1} e poi attraversando l’arco (n_{i+1}, n) :

$$C_{i+1}(n) = \begin{cases} C_i(n) & \text{se } n \in N_i \\ C_i(n) & \text{se } n \notin N_i \text{ e } C_i(n) \leq C_i(n_{i+1}) + w(n_{i+1}) \\ C_i(n_{i+1}) + w(n_{i+1}) & \text{se } n \notin N_i \text{ e } C_i(n) > C_i(n_{i+1}) + w(n_{i+1}) \end{cases}$$

Quando si verifica la terza alternativa, e quindi il costo è stato cambiato, viene cambiato anche il predecessore provvisorio del nodo n , che è posto uguale a n_{i+1} .

Al termine dell’esecuzione, il costo di raggiungimento di ogni nodo è quello “definitivo” che appare più in basso (in modo esplicito) nella colonna relativa al nodo; l’albero generatore minimo è identificato raccogliendo, per ogni nodo diverso dalla radice, l’arco formato^{||} dal nodo stesso e dal proprio predecessore “definitivo”; e l’unico cammino che collega qualsiasi nodo alla radice può essere ricostruito “all’indietro”, mediante la collezione dei predecessori (definitivi) diretti e indiretti del nodo stesso. Ecco dunque la matrice rappresentativa dell’esecuzione dell’algoritmo di Dijkstra per il grafo in oggetto:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
$n_1 \equiv A$		(3, A)	(6, A)	(4, A)	($+\infty$, A)	($+\infty$, A)	($+\infty$, A)	($+\infty$, A)	($+\infty$, A)
$n_2 \equiv B$			(6, A)	(4, A)	(7, B)	($+\infty$, A)	($+\infty$, A)	($+\infty$, A)	($+\infty$, A)
$n_3 \equiv D$			(6, A)		(7, B)	(5, D)	(6, D)	($+\infty$, A)	($+\infty$, A)
$n_4 \equiv F$			(6, A)		(7, B)		(6, D)	(9, F)	(8, F)
$n_5 \equiv C$					(7, B)		(6, D)	(9, F)	(8, F)
$n_6 \equiv G$					(7, B)			(8, G)	(8, F)
$n_7 \equiv E$								(8, G)	(8, F)
$n_8 \equiv H$									(8, F)
$n_8 \equiv I$									(8, F)

^{||}In ordine inverso si intende.

L'albero generatore di costo minimo è dunque:

$$\overrightarrow{T} \equiv (N, \{AB, AC, AD, BE, DF, DG, GH, FI\})$$

i costi di raggiungimento dei vari nodi del grafo sono:

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>F</i>	<i>G</i>	<i>H</i>	<i>I</i>
0	3	6	4	7	5	6	8	8

e, a titolo d'esempio, il cammino percorso a rovescio che in \overrightarrow{T} collega *I* alla radice è

$$(I, F, D, A)$$